
XVIII Encontro de Matemática da UFBA

9 a 13 de dezembro de 2024

Uma Miscelânea de Aplicações de Ultrafiltros em Matemática

SAMUEL GOMES DA SILVA

Objetivo

O propósito deste curso é o de introduzir as noções de filtros, ideais e ultrafiltros e suas aplicações em diferentes áreas da Matemática (com maior ênfase para a Análise e a Topologia). Ultrafiltros possuem, por exemplo, conexão profunda com as noções de compacidade e de convergência, e essas conexões serão exploradas com detalhe no curso. Serão apresentadas também várias demonstrações de resultados profundos onde os ultrafiltros podem aparecer inesperadamente, como no celebrado Teorema da Impossibilidade de Arrow – trabalho que foi ganhador do Prêmio Nobel de Economia em 1972.

Resumo

Filtros e ideais podem ser entendidos como formalizações, em Teoria de Conjuntos (ou, mesmo mais abstratamente, em Álgebras Booleanas e estruturas assemelhadas) das noções de maioria e minoria, respectivamente; os elementos de filtros são conjuntos “grandes”, enquanto que os elementos de ideais são conjuntos “pequenos”. A existência de ultrafiltros - e, mais precisamente, de ultrafiltros livres - é reconhecida como sendo um princípio maximal, e sob esse ponto de vista é frequentemente encarada como sendo uma versão estritamente mais fraca do Axioma da Escolha. Ultrafiltros possuem aplicações profundas em quase todas as áreas da Matemática. Neste minicurso, vamos focar em questões relacionadas à Topologia e à Análise, com um ponto de vista bastante topológico/combinatório. A noção de convergência de filtros e ultrafiltros nos permite definir, construir e verificar as propriedades da compactificação de Stone-Cech do espaço discreto dos naturais; a noção de convergência de ultrafiltros também caracteriza a compacidade em espaços topológicos, tarefa que a convergência de sequências não é capaz de fazer - e ultrafiltros são, ainda, capazes de testemunhar tal incapacidade. Também é comum que os ultrafiltros livres desempenhem, por si sós, papel decisivo em certas questões que são mais normalmente associadas a aplicações do Axioma da Escolha: exemplos disso incluem a prova da existência de subconjuntos da reta com propriedades especiais (não-mensuráveis, não-determinados, etc.), ou mesmo a prova do Teorema de Ramsey para conjuntos infinitos em geral. Finalizaremos com uma aplicação de ultrafiltros em Ciências Sociais - e ganhadora do Prêmio Nobel de Economia em 1972 -, demonstrando que, sob um determinado e preciso ponto de vista, é impossível que eleições de candidatos em uma lista sejam completamente justas e reflitam, fiel e necessariamente, as opiniões da maioria dos votantes.